

12. cvičení - Doplnky

Příklad 1. Přiřaďte následovné funkce s příslušnými definičními oborami k způsobu řešení. Poté vyřešte příklady 1, 2, 3, 5.

(1) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3; M = [0, \infty)^2$

(2) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}; M = \mathbb{R}^2$

(3) $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-5x^2-2y^2}; M = \mathbb{R}^2$

(4) $f(x, y) = 3x + \frac{4y}{x^2} + \frac{27}{y^3}; M = (0, \infty)^2$

(5) $f(x, y) = -(7x + 10y)e^{-x-y}; M = [0, \infty) \times \mathbb{R}$

- (a) Hodnotou minima je nula. Maximum zjistíme pomocí substituce, anebo pomocí polárních souřadnic a vyšetřením průběhu jednorozměrné funkce.
- (b) Funkce maxima nenabývá a supremem je $+\infty$, to můžeme nahlédnout mimo jiné posláním x do nekonečna, pro pevné y . Množina je otevřená a tedy podezřelý bod dostaneme užitím nutné podmínky. To, že skutečně jde o bod minima plyne, mimo jiné z velice vhodně použité AG nerovnosti.
- (c) Funkce maxima nenabývá a supremem je $+\infty$, to můžeme nahlédnout mimo jiné posláním x do nekonečna, pro pevné y . Hledáme minimum, z nutné podmínky najdeme podezřelý bod na vnitřku množiny M . Porovnáním s touthle hodnotou, lehce nahlédneme, že na krajích množiny se minima nabývat nemůže. To, že skutečně jde o minimum dostaneme znovu pomocí AG nerovnosti.
- (d) Jediným minimem je zjevně 0. Maxima budeme hledat na vhodně zvolené kouli $B(0, r)$. To, že existuje vhodné r dostaneme pomocí polárních souřadnic. Na $B(0, r)$ vyřešíme například pomocí nutné podmínky extrému a faktu, že jde o spojitou funkci na kompaktu $B(0, r)$
- (e) Neexistenci maxima dokážeme pomocí substituce $x + y = c$ a ukážeme, že existuje posloupnost jdoucí do nekonečna. Co se týče minima, tak díky stejné substituci, se nám podaří najít kouli mimo které již funkce minima nenabývá. Na příslušné kouli vyšetříme pomocí známých metod pro omezené množiny.



Příklad 2. Společně si odvodíme jak vypadají rotace v $\mathbb{R}^2$ a z toho vzorce pro sčítání úhlů.

- (a) Rozmyslete si, na jednotkové kružnici na jaké vektory se zobrazí vektory $(1, 0)^T$ a $(0, 1)^T$ při rotaci o úhel α .
- (b) Použijte (a) a skládání vektorů, aby jste odvodili vzorec pro rotaci obecného vektoru o úhel α .
- (c) Zapište předchozí výsledek pomocí násobení vhodné matice a vektoru $(a, b)^T$.
- (d) Napište dvěma způsoby, přímo a pomocí násobení matic, rotaci o úhel $\alpha + \beta$.
- (e) Vynásobte matice a odvoďte vzorec pro $\cos(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha + \beta)$, pomocí kosinů a sinů. Nakonec dosazením $\alpha = \beta$ odvoďte vzorec pro dvojnásobný úhel.

